ÉNONCÉ

$\forall s \in \{ z \in \mathbb{C},\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1 \}$, $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$

LEÇONS.

245

244

236

RÉFS.

Stein - Shakarchi - Complex analysis p. 79 et 164.

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. th résidus
2. PPA (principe du prolongement analytique)
3. . Γ est holom sur $\{ z,\ \mathrm{Re}(z) > 0 \}$
   . $z \mapsto \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ holom sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

DÉMO

*: oral
**: pour comprendre.

BUT : $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$ $s \in \{ z \in \mathbb{C},\ Re(z) \in]0,1[\}$.

les fonctions considérées sont holomorphes sur $\{ z \in \mathbb{C},\ 0 < Re(s) < 1 \} = \Omega$
car Γ l'est sur $\{ z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0 \}$ et $z \mapsto \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et ses pôles
sont simples et ce sont les entiers relatifs

Par principe du prolongement analytique, il suffit de montrer
l'égalité sur $]0,1[$.

$]0,1[$ ouvert de Ω admet pt accu., Ω connexe.

Soit $s \in]0,1[$

PLAN :

(1) $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ts}}{1+e^t}\, dt := I(s)$

(2). $I(s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$ (Formule des résidus.)

(1)

→ se ramener à fcle param : Fubini.

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\,dt \int_0^\infty x^{-s} e^{-x}\,dx$$

tt est positif donc Fubini Tonelli : fcble nos produit.

$f_s(t,x) = t^{s-1} e^{-t} x^{-s} e^{-x} > 0 \qquad \forall t,x > 0$

$$\overset{\text{Fubini Tonelli}}{=} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^s \frac{e^{-(t+x)}}{t}\, dt\, dx$$

CV ds la 1e fcle (x fixé)

On pose: $\begin{cases} u = \frac{t}{x} \Leftrightarrow t = ux \\ dt = x\,du. \end{cases}$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty u^s \frac{e^{-(1+u)x}}{ux}\, x\,du\,dx$$

$$= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty u^{s-1} e^{-(1+u)x}\, du\,dx.$$

$$= \int_0^\infty u^{s-1} \left[-\frac{1}{(1+u)} e^{-(1+u)x} \right]_0^\infty du$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{1+u}\, du$$

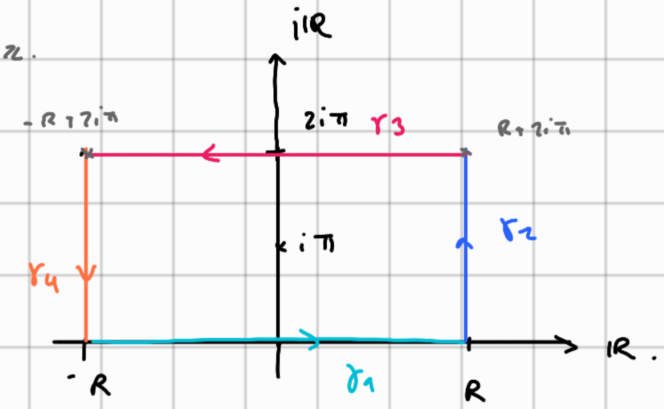
$$\text{CV} : \begin{cases} u = e^t \\ du = e^t\,dt \end{cases} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ts}}{1+e^t}\,dt = I(s) \quad \begin{cases} t = \ln(u) \\ u = 0,\ t = -\infty \\ u = 1,\ t = +\infty \end{cases}$$

② . th des résidus.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{e^{sz}}{1+e^z} \end{cases}$. f holom sur $\mathbb{C} \setminus i\pi\mathbb{Z}$.

$e^z = -1 \Leftrightarrow z = ik\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

. On considère le chemin γ = concat des chemins.
$(R > 0)$



f est méromorphe sur cet ensemble et admet un seul pôle : $i\pi$ ds le lacet (d'ordre 1)

Par le théo des Résidus : $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i\pi)$

Calcul de $\operatorname{Res}(f, i\pi)$

car $1 = -e^{i\pi}$: permet TAcc

$$(z - i\pi) f(z) = (z - i\pi) \frac{e^{sz}}{e^z - e^{i\pi}}$$

$$\xrightarrow[z \to i\pi]{} e^{si\pi} \underbrace{\frac{1}{e^{i\pi}}}_{\text{lim TAcc} \to \frac{1}{g'(i\pi)} \text{ avec } g = e^z} = -e^{i\pi s}.$$

Donc $\operatorname{Res}(f, i\pi) = e^{-i\pi s}$.

AUTRE MET

$\operatorname{Res}(f/g, z_0) = \dfrac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

qd pôle simple.

Calcul $\int_\gamma f$

γ_1 $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ts}}{1+e^t}\,dt \xrightarrow[R \to \infty]{} I(s)$. (CV dominée) $\quad \gamma_1 : t \in [-R, R] \to t$

γ_3 $\displaystyle -\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} f(t+2i\pi) = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{(t+2i\pi)s}}{1+e^{t+2i\pi}}\,dt \quad \tilde{\gamma}_3 : t \in [-R, R] \to 2i\pi + t$

Sens inverse.

$$= -\int_{-R}^{R} e^{2i\pi s} \frac{e^{ts}}{1+e^t}\,dt$$

$$\xrightarrow[R \to \infty]{} -e^{2i\pi s} I(s) \quad \text{(CV dominée)}$$

(γ_2) · $\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} f(R+it)\, i\, dt\right|$

$$= \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{s(R+it)}}{1+e^{(R+it)}}\, i\, dt\right| \qquad \gamma_2 : t \in [0, 2\pi] \longrightarrow R+it$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{Rs}}{|1+e^R e^{it}|}\, dt$$

or $|1+e^R e^{it}| \geq |1-e^R| = e^R - 1$.

Donc $\left|\int_{\gamma_2} f\right| \leq 2\pi \frac{e^{Rs}}{e^R-1} \underset{R\to+\infty}{\sim} 2\pi e^{R(s-1)} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ car $0<s<1$.

(γ_4) De même, $\left|-\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} f(-R+it)\, i\, dt\right| \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

Si le temps :

$$\left|-\int_0^{2\pi} \frac{e^{s(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}\, i\, dt\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{-sR}}{1-e^{-R}} \leq 2\pi \frac{e^{-sR}}{1-e^{-R}} \underset{R\to+\infty}{\sim} 2\pi e^{-Rs} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Conclusion :

D'où : qd $R \to +\infty$ $\quad I(s) - e^{2i\pi s} I(s) + 0 - 0 = -2i\pi e^{i\pi s}$

Donc $I(s) = \dfrac{-2i\pi e^{i\pi s}}{1-e^{2i\pi s}}$

angle moitié :

$$= 2i\pi \cancel{e^{i\pi s}} \frac{1}{\cancel{e^{i\pi s}}\left(e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}\right)} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

DÉMO DES RÉSULTATS ASSOCIÉS.

1. $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ holom $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

. $\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \pi z \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}$.

. $z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ holom $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ par quot fonct holom.

Γ holom sur $\Omega := \{ z . Re(z) > 0 \}$ [Zuily Q.]

Théo holom ss signe fale.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$
$$= \int_0^{\infty} \underbrace{e^{(z-1)\log(t)}}_{f(t,z)} e^{-t} dt .$$

. $\forall t > 0$, $f(t,\cdot)$ holom car exp l'est

. Soit $K \subset\subset \Omega$. $Re(K)$ est un compact de $\mathbb{R}_+^*$ donc $\forall z \in K$, $Re(z) \subset [\varepsilon, n]$, $0 < \varepsilon \leq n$.

$$|e^{-t} e^{(z-1)\log(t)}| \leq e^{(\varepsilon-1)\log(t)} \mathbb{1}_{0<t\leq 1} + t^{(n-1)} e^{-t} \mathbb{1}_{t \geq 1}$$
$$\leq \underbrace{\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}}_{\in L^1(]0,1]) \text{ car } 1-\varepsilon < 1.} \mathbb{1}_{0<t\leq 1} + \underbrace{t^{(n-1)} e^{-t} \mathbb{1}_{t\geq 1}}_{\in L^1([1,+\infty[)}$$ comparaison Riemann par Croiss

Par le th holom ss signe fale, Γ holom sur Ω.

2. TH DES RÉSIDUS :

22 : • $f : \Omega \setminus \{z_1, \dots z_N\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holom.

• γ lacet de Ω { ne passant par aucun des z_j ; homotope au lacet pt ds Ω

$\hookrightarrow$ Alors : $\int_\gamma f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j) \, Ind_\gamma(z_j)$.

$\forall j \in \{1 .. N\}$

$f(z) = g_j(z) + h_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right)$ $|z - z_j| < R_j$ le dév en SL au vois z_j.

On a $h_j(0) = 0$, h_j entière.

la fonct f à laquelle on a enlevé tt les pls

Considérons $\tilde{f}(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{N} h_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right)$, $z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots z_N\}$

$\tilde{f}$ holom sur $\Omega \setminus \{z_1 .. z_N\}$.

$\rightarrow$ mq $\tilde{f}$ holom au vois de z_k $\forall k$:

$$\tilde{f}(z) = \underbrace{f(z) - h_k\left(\frac{1}{z - z_k}\right)}_{\substack{g_k(z) \\ \text{holom vois de } z_k}} - \underbrace{\sum_{j \neq k} h_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right)}_{\text{holom au vois } z_k}$$

Donc $\tilde{f}$ holom au vois de z_k.

Donc $\tilde{f}$ holom sur Ω.

γ étant homotope au lacet pt,

$$0 = \int_\gamma \tilde{f}(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{N} \int_\gamma h_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) dz$$

Or, $h_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) = \frac{\mathrm{Res}(f, z_j)}{z - z_j} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{(z-z_j)^n}}_{F_n'(z)}$ $\longrightarrow$ $\int_\gamma F_n' = 0$ par F_n holom.

Donc $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} 2i\pi \, \mathrm{Res}(f, z_j)\, \mathrm{Ind}_\gamma(z_j)$.

EXOS ASSOC

Appli de la formule des compléments [236]-[245]-[239]-[244].

BUT calculer $I_n = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^n}\,dt$

[a?] Queffelec. "analyse complexe" p. 183.

$$I(s) = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^s}\,dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-x(1+t^s)}\,dx\right) dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-xt^s}\,dt \; e^{-x}\,dx$$

CV: $\begin{cases} u = xt^s \Leftrightarrow t = \left(\frac{u}{x}\right)^{1/s} \\ dt = \frac{1}{s}\frac{1}{x^{1/s}} u^{\frac{1}{s}-1}\,du \end{cases}$ $= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{1}{s}-1}\,du \; \frac{1}{s} x^{-\frac{1}{s}} e^{-x}\,dx$

$$= \int_0^\infty \Gamma\left(\tfrac{1}{s}\right) \frac{1}{s} x^{-\frac{1}{s}} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{s}\Gamma\left(\tfrac{1}{s}\right) \int_0^\infty x^{1-\frac{1}{s}-1} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{s}\Gamma\left(\tfrac{1}{s}\right)\Gamma\left(1-\tfrac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}\,\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{s}\right)}$$ par la formule compl.